Final Examination: Management Science （経営科学　期末試験）

instructor: Naoki Watanabe, date: June 30, 2017

Question 1

(6 points) Three individuals, A, B, and C, engage in a joint production, and their demands for the product are $d_A = 2$, $d_B = 3$, and $d_C = 5$, respectively. Let q denote the total quantity of the product. Then, the production cost is represented by $C(q) = 0.1q^2 + 6$. Note that $q = d_A + d_B + d_C$. Compute the cost shares x_A, x_B, and x_C of those three individuals by the serial cost sharing method.

3 人の個人，A，B，C が共同生産を行っており，その生産物に対する各個人の需要量は $d_A = 2$，$d_B = 3$，$d_C = 5$ である．この共同生産において，総生産量を q とすると，生産コストは $C(q) = 0.1q^2 + 6$ である．ここで，総生産量は $q = d_A + d_B + d_C$ であるとする．各個人が分担する生産費用 x_A，x_B，x_C を逐次分担法によって求めよ．

Question 2

(12 points) The set of students is denoted by S and the set of schools is denoted by T. Let $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ and $T = \{W, X, Y, Z\}$. The students' preferences are listed in Table 1. For student f, e.g., staying alone is preferred to his enrollment in schools Y and Z, which is indicated by $-$. In Table 2, the capacity of each school is shown in the parentheses and the schools' priorities are listed in Table 2. Students except d, e, a, b, and c are, e.g., not allowed to enroll in School Z, which is indicated by $-$.

Table 1: List of students' preferences.

a:	W	Y	-	-	f:	X	W	-	-
b:	Y	W	X	-	g:	X	W	-	-
c:	W	X	Y	-	h:	X	W	-	-
d:	W	X	Y	-	i:	Y	X	W	Z
e:	W	X	Y	-					

(1) Compute the student-optimal matching.

(2) Fix the capacity which each school has. Then, are there any schools which can be better off by misrepresenting their priorities under the student-proposing DA algorithm? Explain your answer.

Table 2: List of schools' priorities.

(2)	W:	a	b	c	d	e	f	g	h	i
(3)	X:	b	d	a	f	g	i	c	e	h
(1)	Y:	a	b	c	g	h	i	d	e	f
(2)	Z:	d	e	a	b	c	-	-	-	

生徒の集合を S，学校の集合を T で表そう．$S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ であり，$T = \{W, X, Y, Z\}$ であるとする．生徒の選好は Table 1 にリストされている．たとえば，生徒 f は学校 Y または Z に入学するよりはそれらの学校に入学しないことを好み，それらは記号 – で示されている．Table 2 では，各学校について，その定員が括弧の中に示されており，続いて，その学校の生徒に対する優先順位がリストされている．たとえば，生徒 d, e, a, b, c 以外の生徒は学校 Z への入学が許可されず，このことは記号 – で示されている．

(1) 生徒側最適なマッチングを計算せよ．

(2) 各学校の定員を固定せよ．このとき，生徒提案型 DA アルゴリズムの下で，生徒に対する優先順位について虚偽表明することでより好ましい生徒を獲得することができる学校はあるだろうか？あなたの解答を説明せよ．

Question 3

(6 points) One unit of an item is auctioned off and there are two bidders for the item. Each bidder knows exactly how much the item would be worth to him or her, but he or she does not know how much the other bidder values it. This auction is a (sealed-bid) second price auction; The highest bidder obtain the item, but pays (to the seller of this item) a price equal to the second highest bid. Find the Bayesian Nash equilibrium of this auction game. Describe some appropriate reasoning to the answer you derive.

ある財が 1 単位ほど入札にかけられており，2 人の入札者がこれを競り落とそうとしている．各入札者はその財が彼または彼女にとってどれほどの価値があるのかを知っているが，他の入札者にとってどれほどの価値があるのかを知らない．この入札は（封入）二位価格入札で行われる．つまり，最も高い入札額を付けた入札者がその財を得るが，二番目に高い入札額の相当する金額を（この財の売手に）支払う．この入札ゲームのベイジアン・ナッシュ均衡を見つけ，あなたが導いた解答に対して適切な理由付けを述べよ．

Question 4

(12 points) Alice and Bob are teammates; Any prize money they win will be equally split between them. The situation they face is as follows. First, Alice decides whether to claim a \$4 prize for the team and thereby ends the game, or to hand control over to Bob. If Bob obtains such an opportunity, he chooses one of two boxes which he cannot see into. There are two possibilities; either the left box contains \$6 and the right box contains \$2, or the left box contains nothing and the right box contains \$2. A priori, these two possibilities are equally likely, but as the teammates are both aware that Alice knows, before her decision, which of the two possibilities has been chosen by Nature. The problem lies in the fact that there is no way for her to communicate this information directly to Bob. Note that the utility of each player for $\$x$ is represented by x.

(1) Draw a game in extensive form which models the situation described above.

(2) Derive the game in strategic form which corresponds to the game you modeled in (1).

(3) Find all the Nash equilibria in pure strategies of the game you modeled in (1).

アリスとボブはチームメイトである．彼らが獲得した賞金は彼らの間で均等に分配される．彼らが直面する状況は次の通りである．最初に，アリスが 4 ドルの賞金を請求するかどうかを決める．彼女が賞金を請求するならば，ゲームはそこで終了し，そのようにしないならば，それに続く決定はボブに託される．ボブは中を見ることができない 2 つの箱を選ぶ．箱に関しては，次の 2 つの事象のうち，どちらかが起こることが判っている．左の箱には 6 ドルが，右の箱には 2 ドルが入っているという事象が起こる確率は 0.5 であり，左の箱には何も入っておらず，右の箱には 2 ドルが入っているという事象が起こる確率は 0.5 である．アリスもボブもこのことを知っており，アリスは彼女自身の選択の前にどちらの事象が起こったのかを知ることができるが，問題は彼女がボブにそれを伝える術を持っていないことである．アリスとボブの効用は，それぞれ，x ドルを得たときには x である．

(1) 上述の状況を展開形ゲームで表せ．

(2) (1) で求めた展開形ゲームに対応する戦略形ゲームを導出せよ．

(3) (1) で求めた展開形ゲームの 純戦略でのナッシュ均衡をすべて求めよ．

Question 5

(8 points) A firm hires a worker. If the worker accepts this contract, then he or she decides to exert effort ($e = 1$) or not ($e = 0$). The utility of the worker is represented by $\sqrt{w^2} - 6e$, given a wage rate w^2 paid to him or her. When $e = 1$ is chosen, the firm obtains $x_h(> 0)$ as its revenue with probability 0.7 and nothing with probability 0.3, whereas when $e = 0$ is chosen, the firm obtains nothing with probability 0.9 and x_h with probability 0.1. The firm cannot observe the effort level of the worker, and thus it offers w^2 as the wage rate paid to the worker, regardless of the revenue it obtains. If the worker rejects this contract, then he or she obtains 9 and the firm's profit is zero. Derive the subgame perfect equilibrium of this game.

ある企業が一人の労働者を雇用しようとしている．労働者は，この契約を受け入れた場合，努力する（$e = 1$）か否（$e = 0$）かを決める．賃金水準 w^2 の支払いに対して，労働者の効用は $\sqrt{w^2} - 6e$ である．$e = 1$ のときには，確率 0.7 で企業は $x_h(> 0)$ ほどの収益を得るが，確率 0.3 でなんの収益も得られない．一方，$e = 0$ のときには，確率 0.9 で なんの収益も得られず，確率 0.1 で収益 x_h を得る．企業は労働者の努力水準を観察することができず，収益に関係なく賃金 w^2 を支払う雇用契約を労働者に提示する．契約を拒否した場合，労働者は留保効用として 9 を得る．このとき，企業の利潤はゼロである．このゲームのサブゲーム完全均衡を導出せよ．

Question 6

(6 points) A manufacturer purchases one unit of an intermediate good from a supplier. The supplier's production cost is $c + s$, where $s(> 0)$ stands for the quality of the intermediate good and $c(> 0)$ denotes the production cost with the lowest quality. The transaction proceeds in the following way.

(Period 1) The manufacturer invests $x^2/2$ into the development of a new technology with which the intermediate goods can be used. The investment is successful with probability x ($0 \leq x \leq 1$); Otherwise, the intermediate good cannot be used.

(Period 2) Knowing that the investment is successful or not, the manufacturer orders the intermediate good. After receiving the order, the supplier produces the intermediate good. Let p be the price of the intermediate good. Then, the profit of the manufacturer at Period 2 is $v + s - p$, where v is the revenue earned by using the intermediate good with the lowest quality. (The investment is a sunk cost at Period 2.) Assume that $0 < v - c < 1$.

In this contract, the amount of investment cannot be clearly described in this contract, the price is set a priori as $p = v$, but the quality of the intermediate good is not specified. How much will the manufacturer invest into the development of a new technology? Can the surplus (total amount of the expected profits of the manufacturer and the supplier) be maximized under this situation?

あるメーカーがサプライヤーから中間財を1単位ほど購入しようとしている．サプライヤーはコスト $c+s$ でその財を生産することができる．ここで，$s(>0)$ はその中間財の品質を表すとし，$c(>0)$ は最低品質の中間財を生産するためにかかるコストである．

(期間 1) メーカーは，サプライヤーが生産する中間財を利用するために，新技術の開発に投資する．その額は $x^2/2$ であり，確率 x（$0 \leq x \leq 1$）でその開発に成功する．失敗すれば，その中間財は利用できない．

(期間 2) メーカーは投資が成功したか否かを知った後で，中間財の生産をサプライヤーに発注する．サプライヤーは，発注を受けて，その中間財を生産する．中間財を価格 p で購入したメーカーの利潤は $v+s-p$ である．ここで，v は最低品質の中間財を利用したときに得られる収入であり，$0 < v-c < 1$ としておく．

投資額は契約書に明記することができないが，価格は事前に契約書に書かれ，$p = v$ に設定されたとする．しかし，中間財の品質 s は契約書には明記できなかった．このとき，メーカーの利潤を最大にする投資額はいくらになるか．取引によって生じる余剰（期待利潤の合計）は最大になりうるか．