

最短経路問題とダイクストラ法

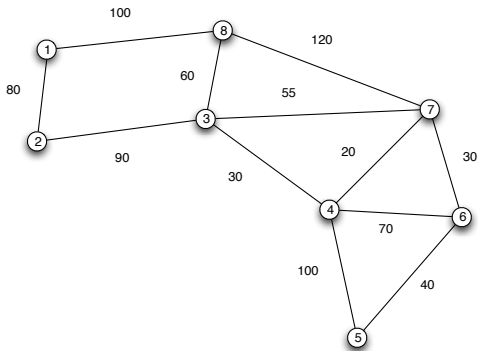
渡邊直樹, KBS

情報と意思決定 extra 1 (2020 年度 2 学期)

1. 最短経路問題

次のネットワークにおいて、番号付きの点は都市，それを繋ぐ枝に付された数字は都市間を結ぶ距離を表す．地理的情報や道路の種類（一般道と有料高速道路）は問題を簡単にするために省略されている．

- ▶ 都市1から都市5へ至る経路のうち最短距離をとるものを探せ．



2. ダイクストラ法：初期設定とステップ1

計算機で解く場合の処理を表を使って説明する． n は都市の番号， $D(n)$ は出発地点である都市1から都市 n までの最短距離， $I(n)$ は都市 n に至る直前の経由地を表す．

▶ 初期設定

- ▶ $D(1) = 0$, $I(1) = 0$ とせよ． $n > 1$ となる n については， $D(n) = \infty$, $I(n) = -1$ を入れておく．

▶ ステップ1

- ▶ 出発地点である都市1に直接繋がっている都市について、表の数値を改訂する．
 - (1) $D(2) = 80$ に， $D(8) = 100$ とし， $I(2) = I(8) = 1$ と書き換える．
 - (2) $D(2)$ と $D(8)$ の値が（上から下へ数字が増えていく）昇順に表の行を並べ替える．

都市 i と都市 j を結ぶ枝があるとき，その枝に付されている数字（距離）を $d(i, j)$ と表す．ステップ1では，都市1から j への枝があるとき， $D(j)$ を $d(1, j)$ に置き換え， $I(j) = 1$ に書き換えている．

2. ダイクストラ法：表による理解1

Table: 初期設定（左）とステップ1（右）

	n	$D(n)$	$l(n)$		n	$D(n)$	$l(n)$
*	1	0	0		1	0	0
	2	∞	-1	*	2	80	1
	3	∞	-1		8	100	1
	4	∞	-1		3	∞	-1
	5	∞	-1		4	∞	-1
	6	∞	-1		5	∞	-1
	7	∞	-1		6	∞	-1
	8	∞	-1		7	∞	-1

*は $D(n)$ が確定された箇所を示す．並べ替えによって最小の数値となっている．

2. ダイクストラ法：ステップ t

- ▶ ステップ t ：ステップ $t-1$ において都市 1 からの最短距離が確定した都市 k に関連して、次のように表を改訂していく。

- (1) 都市 k と j が一つの枝で繋がっていて、

$$D(j) > D(k) + d(k, j)$$

であるならば、 $D(j)$ を $D(k) + d(k, j)$ に置き換え、 $l(j)$ を k にする。

- (2) $D(n)$ の値が（上から下へ値が大きくなる）昇順になるように並べ替える。

2. ダイクストラ法：表による理解2

Table: ステップ2 (左) とステップ3 (右)

n	$D(n)$	$I(n)$		n	$D(n)$	$I(n)$
1	0	0		1	0	0
2	80	1		2	80	1
* 8	100	1		8	100	1
3	170	2	*	3	160	8
4	∞	-1		7	220	8
5	∞	-1		4	∞	-1
6	∞	-1		6	∞	-1
7	∞	-1		7	∞	-1

2. ダイクストラ法：表による理解3

Table: ステップ4 (左) とステップ5 (右)

n	$D(n)$	$I(n)$		n	$D(n)$	$I(n)$
1	0	0		1	0	0
2	80	1		2	80	1
8	100	1		8	100	1
3	160	8		3	160	8
* 4	190	3		4	190	3
7	215	3		* 7	210	4
5	∞	-1		6	260	4
6	∞	-1		5	290	4

2. ダイクストラ法：表による理解4

Table: ステップ6 (左) とステップ7 (右)

n	$D(n)$	$I(n)$	n	$D(n)$	$I(n)$
1	0	0	1	0	0
2	80	1	2	80	1
8	100	1	8	100	1
3	160	8	3	160	8
4	190	3	4	190	3
7	210	3	7	210	4
* 6	240	7	6	240	7
5	290	4	* 5	280	6

2. ダイクストラ法：表による理解5

ステップ7で終了．表を読み取ると，都市1から都市5への最短経路は

$$1 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5$$

であり，最短距離は280であることが判る．

3. 計算機で解く際の tips

- ▶ 最短経路問題では、なぜ、後ろ向き帰納法が使えないのか？
- ▶ ステップ t の (2) において、 $D(n)$ のすべての値を並べ替える (sort する) と、コードは短くなるが、計算機での処理回数を増やしてしまう。計算資源に制約がある場合には、いくぶん、改良の余地がある。どうすればよいか、実際にコードを書くとして、考えてみよ。
- ▶ 最小コスト極大木問題にもダイクストラの方法とほぼ同様のアルゴリズムを適用できる。考えてみよ。