

戦略的状況の表現形式： 非協力ゲーム理論入門 1

渡邊直樹, KBS

経営科学 6 (2020 年 1 学期後半)

Preface

本スライドは、KBS ノート教材「戦略的状況の表現形式：非協力ゲーム理論入門 1」から内容の一部を抜粋し、授業中に使用するスライドや板書に説明を付したものであり、KBS 基礎科目「経営科学」の後半における受講者の板書にかかる労力を軽減するために書かれた。

経営科学後半では、ゲーム理論を基礎に持つ制度設計理論、産業組織論、契約理論が関わる経営課題にスポットライトをあてたケース教材に基づいて、ディスカッションを行っている。本スライドは、それらの根の部分にあたるゲーム理論の基礎事項について、要点を絞ってまとめたものである。どのケース教材でどの基礎事項が関わっているかは本スライド中でノートされている。

1. はじめに

ゲーム理論：協力ゲームと非協力ゲーム

- ▶ 協力ゲーム：交渉において、分析者が重視する条件や公理を有する妥結点が存在するかどうかを検討し、その妥結点の諸性質を考察するための理論的枠組。
 - ▶ マッチング理論における割当の「安定性」は正確には pairwise stability といわれ、協力ゲームの解概念の一つであるコアと極めて密接な関係がある。協力という文字が冠せられているが、**集団での協力を前提とする理論ではない**ことに注意が必要。
 - ▶ 一方、その交渉解の実現可能性や諸性質を非協力ゲームの観点から考えることもできる。マッチング理論における「耐戦略性」とは、個人が自らの選好を調停者に表明し、その調停者が彼らに仲裁案を提示する状況を非協力ゲームとして定式化したときに、各個人に戦略的虚偽表明のインセンティブがないことを意味する。
- ▶ **戦略的状況**：個人の利得が自らの意思決定だけでなく、他の意思決定者の選択にも依存して決まる状況を指す。

- ▶ 非協力ゲーム：戦略的状況における個人の意思決定とその帰結（結果）を考察するための理論的枠組。
 - ▶ 非協力ゲームによる戦略的状況の表現形式には**戦略形**と**展開形**がある。これらの表現形式において、それぞれ、「均衡」が定義される。
 - ▶ 個人の意思決定に重点をおく**ナッシュ均衡**の取り扱いは比較的容易であり、かなり広い範囲の戦略的状況においてその存在を保証できるので、戦略的状況の考察に対して極めて頻繁に適用される解概念である。そのため、非協力ゲームは結果に対する**集団での異議を取り込めていないという誤解**がしばしば生じる。
 - ▶ ただ、結果に対する集団での異議を容認する均衡概念を適用すると、そのような均衡が存在する戦略的状況は限定されてしまう。

- ▶ von Neumann と Morgensterin の著書「ゲームの理論と経済行動」（1944 年）では，戦略的状況において実現しうる帰結をそれに関わる意思決定者による交渉の結果とみなし，実際に観察される帰結を交渉妥結点として解釈するアプローチがとられている。
 - ▶ この書籍によってゲーム理論という学術領域が誕生した．いくつかの前史はある．たとえば，（計算機を駆使してもまだ発見されていないが）チェスには先手または後手に必ず勝てるか引き分けに持ち込める戦略が存在する（Zermelo, 1913），など．
 - ▶ このアプローチにおける交渉を取り扱う理論として，協力ゲームが創始された．
 - ▶ 協力ゲームは，現在，上述の出自からすれば限定的ではあるが，費用分担問題，人や財の割当に関する問題に適用されることが多い．
- ▶ 協力ゲームと非協力ゲームの考え方を融合した考察には抽象ゲームと呼ばれる設定が有用だが，ここでは取り扱わない。
 - ▶ 制度設計理論（メカニズムデザイン）では抽象ゲームによる分析がなされることがある．抽象ゲームの学習に進む前に，協力ゲーム，非協力ゲーム，（実現しうる帰結に対する個人の選好に基づく集団の意思決定を取り扱う）社会選択理論の基礎を学習しておく必要がある．

戦略形ゲーム

2. 戦略形ゲームの構成要素

次の定式化は Nash (1950) によるものであり、分析対象によってはやや異なる定式化がなされることもある。

戦略形ゲーム : $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$

- ▶ $N = \{1, 2, \dots, n\}$: 意思決定者 (プレイヤー) の集まり (プレイヤー1, プレイヤー2, ... プレイヤー n)
- ▶ S_i : プレイヤー $i \in N$ が選択することができる戦略の集まり
- ▶ $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, where $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$: プレイヤーたちが選択した戦略の組 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ が生成するプレイヤー i の利得 $f_i(s)$ (s に対して実数を対応させる関数)
 - ▶ 集合 A と集合 B の直積集合を $A \times B$ と書き, その要素は (a, b) と書く. ここで, a は A の要素であり, b は B の要素である. (数学記号に馴染みがなければ, 読み飛ばしてもよい.)

- ▶ 以下では，戦略形ゲーム G のプレイヤーは彼または彼女自身の利得最大化を行動基準とし，この行動基準を互いに認識しているとする．（これ以外の行動基準を設定してもよい．）

次の3つの例は最も単純な戦略形ゲームである．そのうちの2つは，経営における意思決定問題の「要点を理解するためのメタファー」（教養？）として，しばしば用いられる．

注：Example 1 は展開形ゲーム「4. 重要な応用領域：繰り返しゲーム」で再度取り上げる．

2. Example 1: 囚人のジレンマ

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{U, D\}$, $S_2 = \{L, R\}$, $f_1(U, L) = 2$, $f_2(U, L) = 2$, $f_1(U, R) = 8$, ..., 他の戦略の組に対する各プレイヤーの利得は次の双行列にまとめられている。

		2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
1	<i>U</i>	2, 2	8, 0
	<i>D</i>	0, 8	5, 5

Figure: (U, L) は支配戦略の組であり、パレート効率的ではない。

支配戦略: 他のプレイヤーがどの戦略を選択しようとも、その各々に対して、プレイヤー i にとって最も大きな利得をもたらす戦略。

- ▶ 戦略形ゲームはプレイヤーたちの同時手番でプレイされると考える。彼らの意思決定の順番は表現されていない。
- ▶ **パレート効率性**：利得で表される**ゲームの結果**をそこでの意思決定に関わるプレイヤーからなる「社会」あるいは「組織」の観点から評価するための基準の一つ。以下では、平たい説明を試みる。そこでは利得の増加をより幸せになる、低下することをより不幸になる、ということにする。また、ゲームにおいて、起こりうる結果をその「状態」と言い換えてみる。
 - ▶ ある状態 A において、誰一人より不幸にするなく誰か一人でもより幸せにすることができる状態 B が他にあるならば、状態 B はパレート改善可能であるという。
 - ▶ パレート改善できない状態のことをパレート効率的であるという。

要するに、パレート効率的な状態とは、誰もより不幸にすることなく、誰一人としてより幸福にはなれない状態のこと。

- ▶ Example 1 において、 $s = (U, L)$ による状態 A は $(2, 2)$ だが、 $s' = (D, R)$ による状態 B は $(5, 5)$ なので、状態 A よりは状態 B の方が 2 人のプレイヤーからなる組織ではより好ましいと判定される。

2. 戦略形ゲームのナッシュ均衡

戦略形ゲーム G における戦略の組 $s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ は、すべてのプレイヤー i にとって、他のすべてのプレイヤー j が s_j^* に従うとき、たとえ s_i^* から逸脱してもより大きな利得を得られないならば、**ナッシュ均衡**と呼ばれる。戦略の組 s^* がナッシュ均衡であるとき、プレイヤー i が選択しうるあらゆる戦略 $s_i \in S_i$ について、

$$f_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq f_i(s_i, s_{-i}^*), \quad (1)$$

が成り立っている。

他のすべてのプレイヤーが戦略を変更しない限り、自分だけ戦略を変更しても、自分の利得は増加しない。

⇒ **誰も単独では戦略を変更しようとし**ない。このような戦略の組がナッシュ均衡。

2. Example 2: 硬貨合わせ

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{U, D\}$, $S_2 = \{L, R\}$, $f_1(U, L) = -1$,
 $f_2(U, L) = 1$, $f_1(U, R) = 1$, \dots , 他の戦略の組に対する各プレイヤーの利得は次の双行列にまとめられている.

		2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
1	<i>U</i>	-1, 1	1, -1
	<i>D</i>	1, -1	-1, 1

Figure: 純戦略のナッシュ均衡が存在しない例.

純戦略 (ナッシュ) 均衡が存在しない.

2. Example 3: 男女の諍いゲーム

$N = \{1, 2\}$, $S_1 = \{U, D\}$, $S_2 = \{L, R\}$, $f_1(U, L) = 2$, $f_2(U, L) = 1$, $f_1(U, R) = -1$, ..., 他の戦略の組に対する各プレイヤーの利得は次の双行列にまとめられている.

		2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
1	<i>U</i>	2, 1	-1, -1
	<i>D</i>	-1, -1	1, 2

Figure: 3つのナッシュ均衡（純戦略で2つ、混合戦略で1つ）が存在する例.

混合戦略（ナッシュ）均衡：プレイヤー1は *U* を確率 $3/5$ で選択し、プレイヤー2は *L* を確率 $2/5$ で選択する.

男女の諍いゲームの混合戦略（ナッシュ）均衡

- ▶ プレイヤー 2 が戦略 L を選ぶ確率を p_2 と表す.
- ▶ このとき、プレイヤー 1 が戦略 U を選ぶと、彼または彼女の期待利得は $2p_2 - (1 - p_2)$ であり、戦略 D を選ぶと、それは $-p_2 + (1 - p_2)$ である.
- ▶ $2p_2 - (1 - p_2) \neq -p_2 + (1 - p_2)$ ならば、期待利得最大化行動をとる場合、プレイヤー 1 は戦略 U または D のどちらかを確率 1 で選ぶべきだろう.
- ▶ よって、混合戦略でのナッシュ均衡があるとすれば、

$$2p_2 - (1 - p_2) = -p_2 + (1 - p_2)$$

が成り立っているはずである。これを解いて、 $p_2^* = 2/5$ 。

- ▶ 同様に、プレイヤー 1 が戦略 L を選ぶ確率を p_1 とすると、プレイヤー 2 が戦略 L をとった場合と R をとった場合の期待利得は、それぞれ、 $p_1 - (1 - p_1)$ と $-p_1 + 2(1 - p_1)$ なので、これらが均等化するのには $p_1^* = 3/5$ のときである。

- ▶ 男女の諍いゲームのように、ナッシュ均衡が複数あると、プレイヤーの選択に関する調整（コーディネーション）が必要になる。
- ▶ Example 3 においては、ナッシュ均衡 (U, L) ではプレイヤーの利得は $(2, 1)$ 、もう一つのナッシュ均衡 (D, R) でのそれは $(1, 2)$ だが、 (U, L) における利得が $(3, 2)$ であった場合、均衡 (U, L) は唯一のパレート効率的な結果になる。組織において、パレート効率的な結果をもたらす均衡 (U, L) を実現すべく、調整問題はより重要になる。
- ▶ 組織にとって、プレイヤー同士の調整ではなく、上司の指示に強制的に従わせるといった「集権化」は調整問題の解消の手段の一つではある。
- ▶ プレイヤーの間で、どの均衡が選ばれるべきかに関する「企業文化」が醸成されていれば、それによって調整問題は解消されるだろう。
- ▶ 組織における権限の所在（集権化か分権化か）、企業文化の機能についても、ゲーム理論による考察がなされている。

- ▶ 本スライドの基になった KBS ノート教材「戦略的状況の表現形式：非協力ゲーム理論入門 1」では，その Appendix において，Harsanyi と Selten による**均衡の選択**の考え方がノートされている．そこでは，相手プレイヤーがとる戦略に対する予想が外れたときに各プレイヤーが被る損失額の積で「調整の失敗」のリスクが計測される．
- ▶ Harsanyi と Selten の考え方を実際に適用できる戦略的状況は決して多くはないのだが，複数のナッシュ均衡が存在する戦略的状況において，どの均衡が実現する確率が高いかを考察する研究の端緒となった．

2. 存在定理

Theorem 1 (Nash, 1950) 戦略形ゲーム G において、プレイヤーの人数は有限 ($|N| < \infty$) であり、各プレイヤーが取りうる戦略も有限個 (for every $i \in N$, $|S_i| < \infty$) ならば、混合戦略の範囲で少なくとも一つのナッシュ均衡が存在する。

- ▶ これ以外の存在定理または均衡が存在しない状況に関する定理もある。
- ▶ 男女の争いのように複数の均衡が存在せず、唯一の均衡が存在するための十分条件なども考案されている。複数均衡が存在すると、そのうちのどれが尤もらしいか、どれが実現するかに関する考察もなされている。組織においては意思決定のコーディネーションが重要である。(「経営者の役割」の一つ。)
- ▶ 複数の均衡のうち、どれが尤もらしいかを考察する研究課題は均衡の精緻化、どれが実現するかを考察する研究課題は均衡の選択と呼ばれる。

- ▶ たとえば，ミクロ経済学や産業組織論に教科書に出てくる複占企業の利潤最大化問題の一つは，市場価格（逆需要関数）が $p = a - b(q_1 + q_2)$ で決まる時，

$$\pi_i = pq_i - c_i q_i$$

で与えられる．ここで π_i ， q_i ， c_i は企業 $i = 1, 2$ の利潤，生産量，1 単位あたりの生産コストであり， a と b は市場の需要を特徴付ける正の定数である．ここでは単純化のために負の価格も許容している．（負の価格を許容しないのであれば，逆需要関数は $p = \max(0, a - b(q_1 + q_2))$ と書かれ，計算上の分類が少し煩雑になる．）

このタイプの市場をクールノー市場といい，そこでの寡占をクールノー寡占という．この戦略的状況のナッシュ均衡は（フランスの数学者であった）クールノーが最初に考えたことに因み，クールノー均衡と呼ばれている．

- ▶ ここでは、プレイヤーの数は有限だが、戦略の数は0から無限大までの実数で定義されている。よって、ナッシュの定理は適用できない。このような問題を扱うときには、ナッシュ均衡が存在するような条件を（ a や b などに）つけておく。その代わりに、戦略が連続変数で定義されているので、混合戦略を許容する形にゲームを拡張しなくても、ナッシュ均衡の存在条件を明示できる。

人員配置などのマッチング問題を戦略形ゲームとして定式化すると、プレイヤーの選好は順位で与えられており、彼らは実数で表される利得を得るわけではない。よって、この場合も、ナッシュの定式化による戦略形ゲームが適用されるわけではない。ただし、ゲームの構成要素は同じであり、それはクールノー寡占の戦略形ゲームによる定式化についても同様である。

- ▶ **制度設計理論**：すべてのプレイヤーにとって支配戦略が存在し、かつ、彼らがそれを選択することによって実現する状態がパレート効率性を満たすような制度を設計できるか？
 - ▶ マッチングや入札ではそのような制度が存在することがある。そのような状況では、戦略的状況にあっても、各プレイヤーの戦略は他のプレイヤーの戦略に依存せずに決めることができる。支配戦略による均衡が存在しないならば、ナッシュ均衡として、組織におけるパレート効率的な状態を実現できるかを考える。このとき、ナッシュ均衡の存在を保証する定理は重要な役割を果たす。
 - ▶ マッチングについてはケース教材「ある電機メーカーにおける人材配置問題」, 「二部マッチング計算ソフトウェア」, 「不可分財交換計算ソフトウェア」を、入札については、「調達入札における下請企業の行動 (A)」または「調達入札における下請企業の行動 (B)」を参照してほしい。

展開形ゲーム

3. 展開形ゲームの図解

展開形ゲームは，戦略的状況をプレイヤーたちの意思決定の順番に沿って，次のような点，矢印，点線からなる樹形図で表される．

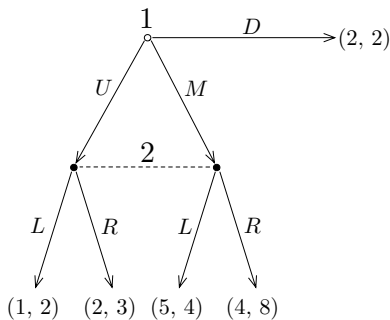


Figure: Example 4

Example 4 では，まず，プレイヤー 1 が U ， M ， D から一つの行動を選ぶ． D が選択されれば，ゲームは終了し， U か M が選択されれば，プレイヤー 2 はそれらのどちらが選択されたかを知ることなく， L か R から一つの行動を選択し，ゲームは終了する．終了後，各プレイヤーは利得を得る．

展開形で表現されるゲームにおいて点を点線で繋ぐと，そこでは意思決定を行うプレイヤーは自分がどちらの点にいるのか判らないことを意味する．

- ▶ 展開形ゲームでは，ゲームにおける手番の順番だけでなく，例1のように，各手番において誰が何を知っており，何を知らないか（非対称情報）を表現することができる．
- ▶ 後で触れるが，何を忘れるかも表現できる．（不完全記憶）

次の定式化は Kuhn (1953) によるものであり，非対称情報だけではなく，プレイヤーの状況認識を表現するために，最近ではこれとは異なる定式化がなされることもある．

3. 展開形ゲームの構成要素

展開形ゲーム : $\Gamma = (K, P, p, U, h)$

- ▶ K : 矢印 (枝) によって完全に順序づけられた点からなる樹形. ディシジョン・ツリーと区別するためか, ゲーム・ツリーと呼ばれることもある.
 - ▶ 1950年代では, まだ統計的意思決定論とゲーム理論は明確に分化していなかった. 当時, 統計的意思決定問題を簡便に記述するために用いられ始めたのがディシジョン・ツリーである.
- ▶ P : プレイヤー分割: K 上の点にプレイヤーを割り当てる. 意思決定者ではないプレイヤーを「自然 (nature)」と呼び, 偶然の手番ともいう.
- ▶ p : 偶然の手番に付された矢印の選択確率.
- ▶ U : 情報分割. プレイヤー分割の細分割であり, 同じ細分割に入る点を点線で繋ぐ.
- ▶ h : ゲームの終点 (その先に矢印がつけられていない点) に貼り付けられた各プレイヤーの利得.

展開形ゲームの構成要素を少しフォーマルに補足する。

- ▶ 展開形ゲームは点 (node), それらを繋ぐ枝 (edge) と点線を構成要素とする。
- ▶ 点は始点 (initial node), 決定点 (decision node), 終点 (terminal node) からなり, ゲームは始点から発して終点に至る。終点には各プレイヤーが得る利得が付される。終点の集まりを W と書くと, プレイヤー i の利得関数 h_i は W の各要素 w に対して実数を対応させている。
- ▶ 点線で結ばれた決定点の集まりを情報集合という。各情報集合にはそこでの意思決定を求められるプレイヤーが割り当てられる。各プレイヤーは, 自分の手番となったときに, 同じ情報集合に入っている決定点のどちらにゲームが到達したかを知らないという意味付けがなされる。(このような形で非対称情報を表現する。)
- ▶ 各点から伸びる枝はそこでの意思決定を行うプレイヤーが選択可能な行動である。同じ情報集合に入っている点では同じ選択肢が貼り付けられていなければならない。

3. 展開形による表現の例

Example 5: アリスとボブはチームメイトである。彼らが獲得した賞金は彼らの間で均等に分配される。彼らが直面している状況は次の通りである。最初に、アリスが4ドルの賞金を請求するかどうかを決める。彼女が賞金を請求するならば、ゲームはそこで終了し、そのようにしないならば、それに続く決定はボブに託される。ボブは中を見ることができない2つの箱を選ぶ。箱に関しては、次の二つの事象のうち、どちらかが起こることが判っている。左の箱には6ドルが、右の箱には何も入っていないという事象が起こる確率は0.5であり、左の箱には何も入っておらず、右の箱には2ドルが入っているという事象が起こる確率は0.5である。アリスもボブもこのことを知っており、アリスは彼女自身の選択の前にどちらの事象が起こったのかを知ることができるが、問題は彼女がボブにそれを伝える術を持っていないことである。

Example 5 で記述された状況を展開形で表現したものは左図に描かれている。展開形ゲームにおいて、すべての情報集合における各プレイヤーの行動（枝）を指定して期待利得を計算すると、後述するように、戦略形ゲームに書き直せる。（標準化という。）

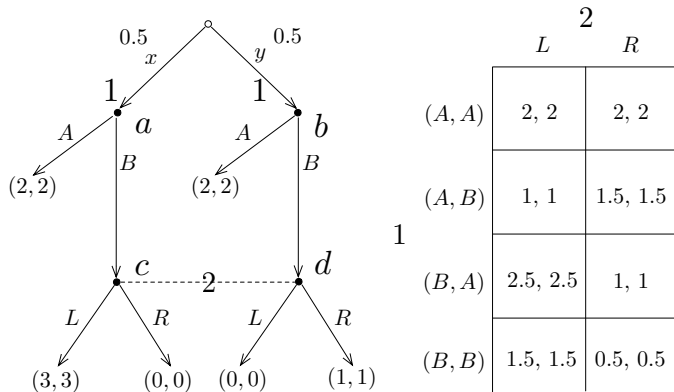


Figure: ある展開形ゲームとそれに対応する戦略形ゲーム

- ▶ 展開形ゲームにおけるプレイヤーの**純戦略**は各**情報集合**において**指定される行動のリスト**で定義される.
 - ▶ Example 5 の展開形ゲームによる表現では、プレイヤー1の情報集合は $\{a\}$ と $\{b\}$ の2つあり、プレイヤー2の情報集合は点線で結ばれた c と d の集まり1つだけである.
 - ▶ プレイヤー1が情報集合 $\{a\}$ でとる行動を B 、情報集合 $\{b\}$ でとる行動を A とすると、これらの行動からなる戦略を (B, A) と書くことにする.
 - ▶ 展開形ゲームの**混合戦略**も、戦略形ゲームにおけるそれと同様に、定義される.
- ▶ 以下では、展開形ゲーム Γ のプレイヤーは彼または彼女自身の期待利得最大化を行動基準とし、この行動基準を互いに認識しているとする。(これ以外の行動基準を設定してもよい.)
- ▶ 展開形ゲームにおいてもナッシュ均衡が定義される。数式での表現は、戦略形ゲームにおけるそれと比べて、やや煩雑なので、ここでは省略する。しかし、
 - ▶ 他のすべてのプレイヤーが戦略を変更しない限り、自分だけ戦略を変更しても、自分の利得は増加しない。
⇒ **誰も単独では戦略を変更しようとし**ない。このような戦略の組がナッシュ均衡。という点はまったく同じ。

3: 展開形ゲームのナッシュ均衡

展開形ゲームのナッシュ均衡をフォーマルな形で定義するにはいくつかの数学記号を準備する必要がある。ここでは、それには触れずに、Example 5 の純戦略でのナッシュ均衡を求めてみる。

- ▶ 情報集合 $\{a\}$ と $\{b\}$ において、プレイヤー 1 はそれぞれ行動 A と B を選択するとしよう。これを (A, B) と書く。情報集合 $\{c, d\}$ にゲームが到達したとき、プレイヤー 2 はプレイヤー 1 が B を選択したことを観察したが、自然の手番において、 x と y のどちらが選ばれたのかを観察できていない。このとき、プレイヤー 2 は行動 L を選択したとすると、ゲームの終点における利得は両プレイヤーとも 0 である。
- ▶ プレイヤー 2 が L を選択すると分かっていたら、プレイヤー 1 は戦略を (B, A) に変更するだろう。つまり、情報集合 $\{a\}$ においては行動 B を、情報集合 $\{b\}$ においては行動 A を選択することで、ゲームの終点における自分の利得を 3 または 2 に増加させることができる。 x の発生確率は 0.5 なので、プレイヤー 1 の期待利得は $0.5 * 3 + 0.5 * 2 = 2.5$ であり、プレイヤー 2 も期待利得 2.5 を得る。

- ▶ プレイヤー1が戦略 (B, A) をとると思い直したプレイヤー2は戦略 L を R に変更することはない. 何故ならば, そうすることで, プレイヤー1の期待利得は1に減少してしまうからである.
- ▶ よって, $((B, A), L)$ は Example 5 の展開形ゲームにおける純戦略でのナッシュ均衡の一つであることが判る. このゲームにはもう一つ純戦略でのナッシュ均衡 $((A, A), R)$ が存在する.
- ▶ 各情報集合における行動を選択する確率を指定することによっても戦略を定義でき, これを**行動戦略**という. 純戦略とは各プレイヤーがすべての情報集合において確率1である行動を選択する行動戦略のリストからなる戦略の組である.

3. 展開形ゲームとその標準化

- ▶ プレイヤー1の戦略と (B, A) とプレイヤー2の戦略 L を展開形上で指定すると、始点から、0.5の確率でゲームは利得 $(3, 3)$ が貼り付けられている最終点に到達し、0.5の確率で利得 $(3, 3)$ が貼り付けられている終点に到達する。よって、戦略の組 $((B, A), L)$ におけるプレイヤー1の期待利得は

$$0.5 * 3 + 0.5 * 2 = 2.5$$

であり、プレイヤー2の期待利得も同様に

$$0.5 * 3 + 0.5 * 2 = 2.5$$

と計算される。他の戦略の組における各プレイヤーの期待利得も同様に計算される。

展開形ゲームを戦略形ゲームに標準化すると、戦略形ゲームの性質上、展開形ゲームで表現できていたプレイヤーたちによる意思決定の順番は捨象されてしまう。つまり、標準化されたゲームでは同時手番による戦略の選択問題になっていることに注意してほしい。

- ▶ 上記の展開形ゲームを標準化した戦略形ゲームの純戦略でのナッシュ均衡は $((A, A), R)$ と $((B, A), L)$ であり、ナッシュ均衡におけるプレイヤーの期待利得の組は、それぞれ、 $(2, 2)$ と $(2.5, 2.5)$ である。
 - ▶ 練習問題：混合戦略でのナッシュ均衡は？（ヒント：ナッシュ均衡において、ある戦略に支配される戦略が使われることはない。）
- ▶ すべてのプレイヤーは自分が知りえたことを忘れない（**完全記憶**）と仮定すると、**展開形ゲームの混合戦略でのナッシュ均衡**と**行動戦略でのナッシュ均衡**はプレイヤーの期待利得について**同等である**。（後述するクーンの定理）
 - ▶ Example 5 では、各プレイヤーは1度しか意思決定しないので、記憶の不完全性を検証する必要はない。

3. 不完全記憶

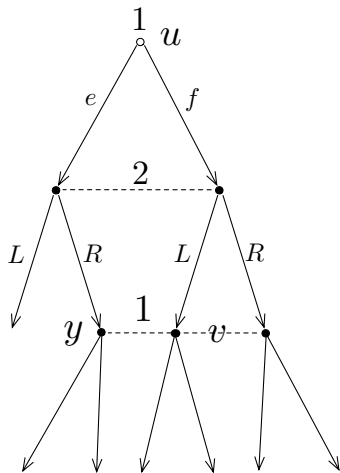


Figure: プレイヤー 1 は完全な記憶を持たない.

ゲームが情報集合 $\{v\}$ に至ったとき、プレイヤー 1 は自分が情報集合 $\{u\}$ における最初の手番で何を選択したのかを忘れてしまっている。

3. 存在定理

展開形ゲームの混合戦略から行動戦略を導くことができるのだが、その記述には多くの数学記号が必要なので、ここでは省略する。それについてはやや不正確な表現ではあるが、Theorem 1 から展開形ゲームにおけるナッシュ均衡の存在定理を直裁に導くための補助定理として記しておく。

クーンの定理 (Kuhn, 1953) 有限な展開形ゲーム Γ において、任意の混合戦略の組 $q = (q_1, \dots, q_n)$ とそれに対応する各プレイヤーの期待利得関数 H_i について、

$$H_i(q) = H_i(b(q)).$$

となるように行動戦略 $b(q)$ を導くための必要十分条件は Γ におけるすべてのプレイヤーが完全記憶を持つことである。

Theorem 2 完全記憶を持つ有限な展開形ゲーム Γ には少なくとも一つの行動戦略によるナッシュ均衡が存在する。

- ▶ 展開形ゲームの**産業組織論**への応用については「牧之原の茶問屋（簡易版）」の Appendix で簡単に取り上げられている。その**完備契約**への応用例については、「インセンティブ付与とリスク分担：モラルハザードが生じる状況における雇用契約」と「顧客のスクリーニング：アドヴァースセレクトションが生じる状況における商品設計」。**不完備契約**への応用については、「ホールドアップ問題：部品取引における関係特種的投資」と「決定権の配分：企業の資金調達への応用例」を参照してほしい。
- ▶ 上記分野のいずれにおいても、展開形ゲームのナッシュ均衡の存在を前提に議論が組み立てられている。
 - ▶ スクリーニングにおいては、(ここでは説明しないが) ベイジアンゲームのナッシュ均衡の存在を前提として、制度設計理論における重要な考え方である**顕示原理**が本質的に用いられているのだが、ベイジアンゲーム自体は展開形ゲームである。(この一文はゲーム理論を既にある程度学習済みの受講者に向けてのものである。)

4. 重要な応用領域 1 : シグナリング・ゲーム

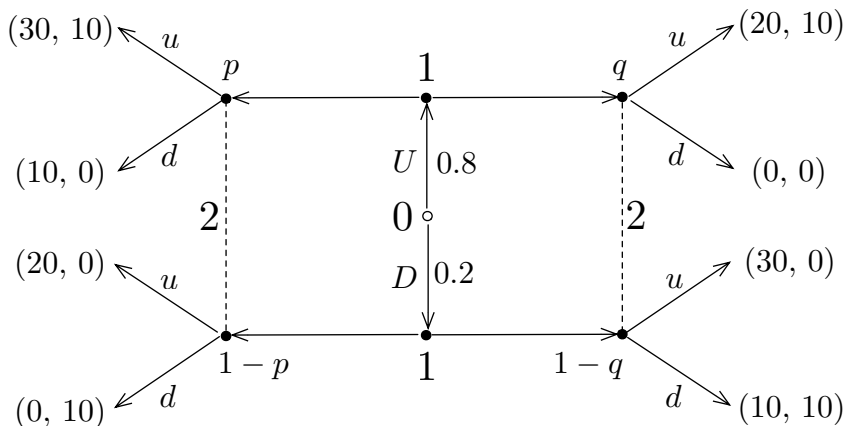


Figure: 最も単純なシグナリング・ゲーム. ここで $p(q)$ はプレイヤー 1 が左 (右) を選択したときに偶然手番が U をプレイヤー 1 に伝達したと予想するプレイヤー 2 の信念を確率で表したもの.

- ▶ 1980年代に雇用契約や銀行貸付などの分析に盛んに応用された。2000年ごろには会計学や政治学でも流行った。
- ▶ 経済学部上級生から経済学研究科1年生で学習する内容であり、その理解には多変数関数の微分の知識が要求されるが、労働市場におけるシグナリングについては、KBS博士後期課程の授業「経営科学特論」のために準備したノート教材「非対称情報下の市場均衡：情報の経済学」において、詳細な説明がなされている。
- ▶ そのノート教材では、ゲーム理論による定式化ではなく、市場均衡理論の枠組でシグナリングの説明を試みている。労働市場におけるシグナリングをゲーム理論を用いて再定式化し、簡便かつ詳細な分析を行えるようになったことは、非協力ゲーム理論が経済学、経営学、政治学などに浸透していく過程において重要な出来事となった。
- ▶ シグナリング・ゲームは、現在、組織における**戦略的情報伝達**を考察するための大きな研究領域となっている。

4. 重要な応用領域2：繰り返しゲーム

各地域における取引慣行に言及するには、**契約書には書かれない長期にわたる関係**に対する視座が必要である。

- ▶ 特に、法学者マクニールが提唱した**関係契約**のゲーム理論による定式化においては重要な視座である。
- ▶ 戦略形ゲームの説明における Example 3 で言及した**権限委譲**や**企業文化**の定式化についても同様である。

これらの考察の基礎になっているのが**繰り返しゲーム**である。繰り返しゲームの記述には、この後で簡単にノートするように、展開形を明示的に描くことはあまりない。しかし、そこでのプレイヤーの意思決定は、Example 5 と同様に、展開形ゲームにおける推論方法に従う。

- ▶ Example 1 を再考しよう.

		2	
		<i>L</i>	<i>R</i>
1	<i>U</i>	2, 2	8, 0
	<i>D</i>	0, 8	5, 5

Figure: 囚人のジレンマ : *D* と *R* を協力行動と解釈する.

- ▶ 囚人のジレンマにおいて, 1 回きりのプレイならば, 各プレイヤーにとって支配戦略が存在し, 利得の組 (2, 2) が実現するだろう. (実際, どの大学で実験してみても, 95%前後の確率でそうなる.) 両プレイヤーともに利得の組 (5, 5) にパレート改善したいが, 支配戦略に気がつけば, それは難しいことを悟るだろう.
- ▶ このゲームが数期に渡って繰り返されるならば, パレート改善できるだろうか?

- ▶ ここでは（同時手番である）Example 1 の戦略形ゲームが繰り返され、両企業が互いの行動を選択直後に観測可能であるとしよう。
- ▶ このとき、ゲームの履歴が定義される。各プレイヤーの純戦略は、過去の履歴を参照して、当該期とそれ以降の各期における「行動」を指定する関数として定義される。
 - ▶ 各期においてとられる D と R を利得の組 $(5, 5)$ を実現するための「協力」行動 (C) と解釈する。このとき、 U と L を「裏切り」行為 (D) ということにしよう。
 - ▶ 3期まで終了した Example 1 の繰り返しゲームの履歴は、たとえば、 $((C, D), (D, C), (C, D))$ のように記述される。
 - ▶ 履歴が異なれば、それ以降の各期において繰り返し替えされる同じ状況 (Example 1) は異なるものとして区別される。
- ▶ 以下では、両企業ともいつ終わりが来るのか判らず、1期経過するごとに利得を両通の割引因子 δ ($0 < \delta < 1$) で割り引くとする。

- ▶ トリガー (trigger) 戦略: 最初は C を選ぶ. 相手が C を選択する限り, C を選択するが, D を観察したら, 次の期からずっと D を選択し続ける. 両企業がトリガー戦略を選択すると, トリガー戦略の組はナッシュ均衡を構成しうる.
 - ・ ある期まで両プレイヤーはトリガー戦略をとっているとする. 次の期に企業 1 が戦略を変更して, D をとったとすると, 企業 1 は, その期以降, 高々

$$8 + 2\delta + 2\delta^2 + \dots = 8 + \frac{2\delta}{1 - \delta}$$

しか得られない. トリガー戦略をとり続けると, 企業 1 は

$$5 + 5\delta + 5\delta^2 + \dots = \frac{5}{1 - \delta}$$

を得る. よって, $5/(1 - \delta) \geq 8 + 2\delta/(1 - \delta)$, つまり, $\delta \geq 1/2$ であるとき, 各々の企業にトリガー戦略から離脱するインセンティブは存在しない. したがって, 各末におけるパレート効率的な状態を繰り返しゲームのナッシュ均衡の結果として実現できる.

- ▶ もちろん，各企業にとって，最初からずっと D をとるという戦略の組から離脱するインセンティブもない．つまり，無限回繰り返したとしても，協力関係のみが成立するのではない．
- ▶ 協力関係を成立させるナッシュ均衡は数多い．たとえば，TFT (tit for tat) 戦略の組がナッシュ均衡となることは直感的にも理解しやすい．
 - ▶ TFT 戦略では，自社は最初期において C を選び，それ以降の各期において，直前期に相手企業が C をとった次の期には C をとり， D をとれば次の期に D をとってやり返す。「目には目を，歯には歯を」の実践．
- ▶ このことは Example 3 で取り上げた「調整の問題」が繰り返しゲームでも生じうることを意味しており，協力関係の構築とその維持にも集権化，リーダーシップ，企業間で共有される文化などによる調整が実務上必要になることを示唆している．

- ▶ さらに、相手企業の行動が明確には観察されない場合（**不完全観測**）の戦略の立案や同業他社との**多市場接触**を組み込むことで、協力関係の構築と維持に関するより実務に近い状況を考察することができるが、その考察は（分析内容の煩雑さゆえに）まだ専門家の間でのみ知られるに留まっている。